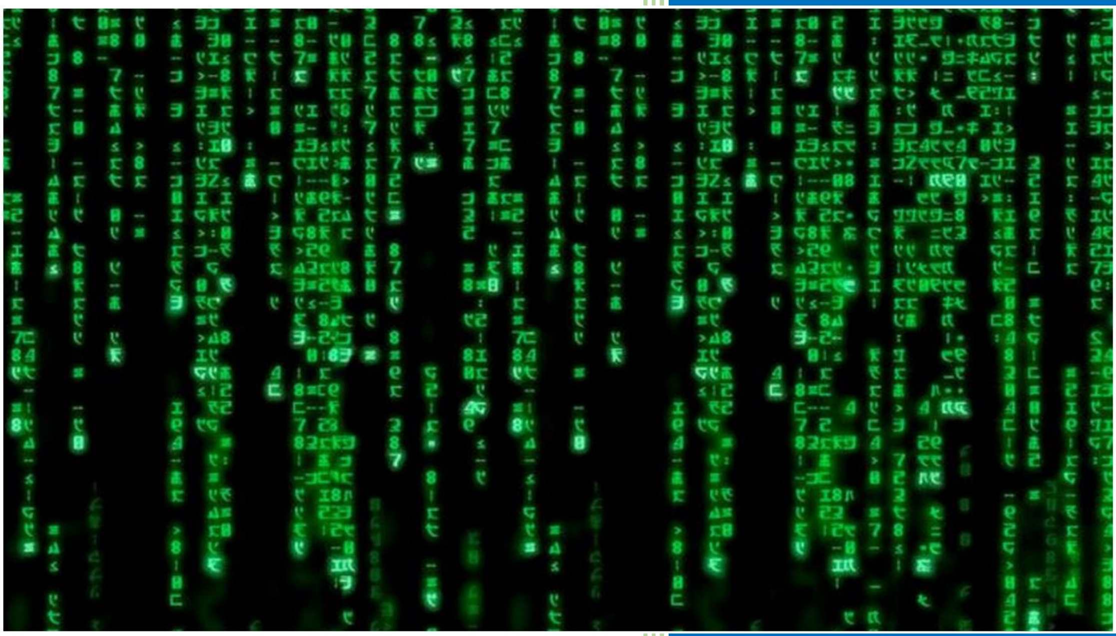
2020

Ecriture des puissances



Stardust2053

www.multiversel.com

01/06/2020

Table des matières

Opérations sur les puissances

Elévation à la puissance

On note l'élévation à la puissance n d'une expression x sous la forme $\boldsymbol{x^n}$ (x à la puissance n)

$\boldsymbol{x^1 = x}$, $\boldsymbol{x^2 = x.x}$, $\boldsymbol{x^3 = x.x.x}$, ...

Multiplication

Prenons l'exemple suivant

$x^3.\ x^2$ En développant, cette expression s'écrit : $x.x.x\ .\ x.x = x^5$

$x^3.\ x^2 = x^5 = x^{3+2}$

La multiplication est une addition des puissances

$$\boldsymbol{x^n.\ x^m = x^{n+m}}$$

Division

Prenons l'exemple suivant :

$\frac{x^3}{x^2}$ En développant, cette expression s'écrit : $\frac{x.x.x}{x.x}$ après simplification on obtient $\frac{x^3}{x^2} = x$

$$\frac{x^3}{x^2} = x^1 = x^{3-2}$$

La division est une soustraction des puissances

$$\boldsymbol{\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}}$$

Puissances négatives

Prenons l'exemple suivant :

$\frac{x^2}{x^3}$ En développant, cette expression s'écrit : $\frac{x.x}{x.x.x}$ après simplification on obtient $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} = x^{2-3} = x^{-1}$$

On peut donc écrire

$$\frac{1}{x^1} = x^{-1}, \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \quad \frac{1}{x^3} = x^{-3}, \ldots$$

Les puissances négatives

$$\boldsymbol{\frac{1}{x^n} = x^{-n}}$$

Puissance nulle

Prenons l'exemple suivant :

$\frac{x^2}{x^2}$ En développant, cette expression s'écrit : $\frac{x.x}{x.x}$ après simplification on obtient $\frac{x^2}{x^2} = 1$

$\frac{x^2}{x^2} = x^2x^{-2} = x^{2-2} = x^0 = 1$

Puissance nulle
$\mathbf{x^0 = 1}$

Puissances fractionnaires

Prenons l'exemple suivant :

Soit $r = \sqrt{x}$ également noté $\sqrt[2]{x}$.

r est un nombre réel positif appelé ***racine carrée de x***.

Le nombre r est l'unique nombre réel tel que $r.r = r^2 = x$

$\sqrt{x}\,.\sqrt{x} = x$

Nous allons en déduire l'expression en puissance de $\sqrt{x}$

On cherche n tel que $x^n.\ x^n = x^1$

La multiplication des puissances implique

$n + n = 1$ soit $2n = 1$ donc $n = \frac{1}{2}$

La notation $\sqrt[2]{x}$ peut donc s'écrire $x^{\frac{1}{2}}$

De même on note $r = \sqrt[3]{x}$ le nombre réel appelé ***racine cubique de x***.

Le nombre r est l'unique nombre réel tel que $r.r.r = r^3 = x$

$\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{x} = x$

$x^n.\ x^n.\ x^n = x^1$ soit $3n = 1$ donc $n = \frac{1}{3}$

La notation $\sqrt[3]{x}$ peut donc s'écrire $x^{\frac{1}{3}}$

En généralisant

Puissances fractionnaires
$\mathbf{\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}}$

Puissances fractionnaires négatives

Nous pouvons combiner 2 notions étudiées précédemment
Prenons l'exemple suivant :

$$\frac{1}{\sqrt[2]{x}}$$

En utilisant les puissances fractionnaires, nous pouvons écrire cette expression sous la forme

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

En utilisant les puissances négatives, cette expression s'écrit également

$$x^{-\frac{1}{2}}$$

Puissances fractionnaires négatives
$\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$

Puissance d'une puissance

Prenons l'exemple suivant
$(x^2)^3$ que l'on peut noter x^{2^3} ce qui peut se traduire par *x* au carré au cube (ou encore cube de *x* au carré)

En développant, cette expression peut s'écrire
$\boldsymbol{x^2 . x^2 . x^2 = x.x \ . \ x.x \ . \ x.x = x^6}$

$(x^2)^3 = \boldsymbol{x^6} = \boldsymbol{x^{2 \times 3}}$

La puissance d'une puissance est une multiplication des puissances
$\boldsymbol{(x^n)^m = x^{n \times m}}$

Application à l'élévation au carré de la fonction racine carré

Soit l'expression $(\sqrt[2]{x})^2$ nous pouvons l'écrire $(x^{\frac{1}{2}})^2$ soit encore $x^{\frac{1}{2}\times 2} = x^1 = x$

On retrouve que le carré de la racine carrée de *x* est égal à *x*

Synthèse

Puissances entières positives ou nulle

$$x^0 = 1$$

$$x^1 = x,$$
$$x^2 = x.x,$$
$$x^3 = x.x.x, \dots$$

Puissances entières négatives

$$x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Puissances fractionnaires positives

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Puissances fractionnaires négatives

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{x}}$$

$$x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

Multiplication de la fonction puissance

$$x^n \, . \, x^m = x^{n+m}$$

Division de la fonction puissance

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Elévation à la puissance de la fonction puissance

$$(x^n)^m = x^{n\,.\,m}$$

Exercice puissant

Ce formalisme permet par exemple d'écrire : $\left(\sqrt[2]{a}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 = a^{\frac{3}{2}}$

On demande de simplifier l'écriture de l'expression :

$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right)^5$$

Méthode appliquée dite du « bon élève »

$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right)^5 = \left(\frac{1}{x^{3\times\frac{1}{5}}}\right)^5 = \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{5}}}\right)^5 = \left(x^{-\frac{3}{5}}\right)^5 = x^{-\frac{3}{5}\times 5} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

Méthode maline dite du « très bon élève » : on pose a= x^3

$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{a}}\right)^5 = \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{5}}}\right)^5 = a^{-\frac{1}{5}\times 5} = a^{-1}$ il reste à remplacer a par sa valeur $(x^3)^{-1} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Méthode très maline dite de l'élève « œil de lynx » : on pose a= x^3 et on remarque que l'expression est de la forme

$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{a}}\right)^5 = \frac{1^5}{\left(\sqrt[5]{a}\right)^5} = \frac{1^5}{\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^5} = \frac{1}{a} = \frac{1}{x^3}$$